

Dynamische Basen und periodische Darstellungen rationaler Zahlen

Teil I: Grundlagen und Problemstellung

1. Ausgangspunkt und Motivation

Die Darstellung rationaler Zahlen in positionalen Zahlensystemen ist ein klassisches Thema der Mathematik. In der Regel wird dabei eine feste Basis $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$, vorausgesetzt, und die Darstellung einer rationalen Zahl wird relativ zu dieser Basis analysiert. Insbesondere werden periodische Darstellungen als charakteristische Eigenschaft rationaler Zahlen betrachtet, deren Nenner nicht ausschließlich aus Primfaktoren der Basis besteht.

Diese Perspektive impliziert mehrere unausgesprochene Annahmen:

1. Die Basis ist eine fixe, globale Größe.
2. Die Ziffernauflösung ist atomar (eine Ziffer pro Schritt).
3. Die Periodenlänge ist eine intrinsische Eigenschaft der Zahl.

Diese Arbeit zeigt, dass alle drei Annahmen nicht notwendig sind und dass ihre Aufgabe zu einer wesentlich allgemeineren und präziseren Theorie periodischer Darstellungen führt.

2. Klassische Definition der Periodizität

Sei $\frac{a}{n}$ eine rationale Zahl in vollständig gekürzter Form und $b \geq 2$ eine feste Basis. Die Darstellung von $\frac{a}{n}$ in Basis b ist entweder endlich oder periodisch.

Im periodischen Fall existiert eine minimale natürliche Zahl L , sodass

$$b^L \equiv 1 \pmod{n'}$$

wobei n' der Teil von n ist, der teilerfremd zu b ist.

Die Zahl L wird als Periodenlänge bezeichnet.

Diese Definition ist korrekt, aber unvollständig, da sie stillschweigend voraussetzt, dass die Basis und die Ziffernauflösung fix sind.

3. Gruppentheoretische Interpretation

Für den Fall eines primen Nenners p , mit $\gcd(b, p) = 1$, ergibt sich eine präzisere Beschreibung.

Die nichtverschwindenden Reste modulo p bilden die multiplikative Gruppe

$$\mathbb{Z}_p^*.$$

Die Periodenlänge der Darstellung von $1/p$ in Basis b ist gleich der Ordnung von b in dieser Gruppe:

$$L = \text{ord}_p(b).$$

Die periodische Ziffernfolge ist somit eine Projektion des Orbits

$$1, b, b^2, \dots$$

auf ein Ziffernalphabet.

Bereits an dieser Stelle wird deutlich, dass die Periodizität nicht unmittelbar eine Eigenschaft der Zahl $1/p$ ist, sondern eine Eigenschaft der Gruppenaktion durch die gewählte Basis.

4. Blockdarstellungen und erweiterte Basen

Die klassische Darstellung verwendet implizit die kleinstmögliche Auflösung: eine Ziffer pro Schritt. Diese Wahl ist jedoch nicht zwingend.

Statt Basis b kann ebenso Basis b^m verwendet werden, wobei jeweils m Schritte der ursprünglichen Darstellung zu einem Block zusammengefasst werden.

Formal entspricht dies der Betrachtung der Gruppenaktion

$$x \mapsto b^m x \pmod{p}$$

anstelle von

$$x \mapsto bx \pmod{p}.$$

Die resultierende Periodenlänge ist dann die Ordnung von b^m modulo p , die stets ein Teiler der ursprünglichen Ordnung ist.

Damit ist Periodizität nicht atomar, sondern hierarchisch zerlegbar.

5. Vollständige Blockperiodizität

Ein besonderer Grenzfall tritt ein, wenn die Basis gleich dem Nenner ist. Für einen primen Nenner p gilt:

$$\frac{1}{p} = 0.\bar{1}_{(p)}.$$

Die Darstellung ist blockperiodisch mit Periodenlänge 1. Die gesamte zyklische Struktur ist in einem einzigen Block kodiert.

Diese Darstellung ist weder trivial noch informationsleer. Sie stellt den maximalen Kompressionszustand der periodischen Struktur dar.

6. Erste Konsequenz: Periodenlänge ist kein absolutes Maß

Aus den bisherigen Beobachtungen folgt unmittelbar:

- Die Periodenlänge ist nicht invariant unter Basiswechsel.
- Die gleiche rationale Zahl besitzt eine ganze Familie äquivalenter periodischer Darstellungen.
- Lange Perioden entstehen durch feine Auflösung, kurze Perioden durch grobe Auflösung.

Damit ist Periodenlänge kein Maß für inhärente Komplexität, sondern ein Maß für die gewählte Skala.

7. Übergang zur dynamischen Basissicht

Wird die Basis nicht als feste Größe betrachtet, sondern als veränderlicher Parameter, so wird eine Darstellung zu einer Folge von Darstellungen über einen Basispfad:

$$b_1, \qquad \qquad \qquad b_2, \qquad \qquad \qquad b_3,$$

In diesem Rahmen ist eine Zahl nicht mehr durch eine einzelne Darstellung beschrieben, sondern durch eine Trajektorie im Raum möglicher Darstellungen.

Diese Sichtweise bildet die Grundlage für eine Neuformulierung des Begriffs der periodischen Darstellung.

8. Definition dynamischer Basen

Eine dynamische Basis ist keine feste Zahl, sondern eine Folge

$$\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, \dots)$$

mit $b_k \geq 2$, wobei jede Basiswahl eine neue Koordinatisierung derselben rationalen Zahl induziert.

Eine Darstellung einer rationalen Zahl ist in diesem Kontext nicht mehr ein einzelnes Objekt, sondern eine Familie von Darstellungen, parametrisiert durch die Basisfolge. Die klassische Darstellung in Basis 10 entspricht dem Spezialfall einer konstanten Basisfolge $b_k = 10$.

9. Blockgröße als freier Parameter

Neben der Basis ist die Blockgröße ein zweiter, unabhängiger Freiheitsgrad.

Für eine Basis b und eine Blockgröße $m \geq 1$ wird die Darstellung nicht in Ziffern der Basis b , sondern in Blöcken der Basis b^m betrachtet. Formal wird damit die Gruppenaktion

$$x \mapsto b^m x \pmod{p}$$

verwendet.

Die klassische Darstellung entspricht dem Grenzfall $m = 1$.

10. Definition der Blockperiode

Sei p ein Prime mit $\gcd(b, p) = 1$.

Die **Blockperiode** $L_{b,m}(p)$ wird definiert als die kleinste positive ganze Zahl k , für die gilt:

$$(b^m)^k \equiv 1 \pmod{p}.$$

Die Blockperiode ist damit die Ordnung von b^m modulo p .

Diese Definition verallgemeinert die klassische Periodenlänge und zeigt explizit ihre Abhängigkeit von der gewählten Skala.

11. Hierarchie der Perioden

Für festes p und b ergibt sich eine natürliche Hierarchie von Perioden:

$$L_{b,1}(p) \geq L_{b,2}(p) \geq L_{b,3}(p) \geq \dots$$

Jede Vergrößerung der Blockgröße führt zu einer nicht zunehmenden Periodenlänge. Die Periodenstruktur ist somit **monoton komprimierbar**.

Im Grenzfall existiert stets eine Blockgröße, für die die Blockperiode gleich 1 ist, sofern $b^m \equiv 1 \pmod{p}$ gilt.

12. Blockperiodizität als vollständige Struktur

Eine Blockperiode von Länge 1 bedeutet nicht das Verschwinden der periodischen Struktur, sondern ihre vollständige Zusammenziehung in einen einzelnen Block.

Die gesamte zyklische Information ist dann in der Amplitude des Blocks enthalten, nicht in der Länge der Wiederholung.

Damit wird klar:

- Periodizität ist nicht mit Wiederholungslänge gleichzusetzen.
 - Wiederholungslänge ist lediglich eine Darstellungsentscheidung.
-

13. Invariante Struktur unter Basiswechsel

Unter allen Basis- und Blockwechseln bleiben bestimmte Eigenschaften invariant:

1. Der rationale Zahlenwert.
2. Die Gruppenstruktur von $\mathbb{Z}_p^*$.
3. Die Existenz zyklischer Orbits.

Nicht invariant sind:

- Ziffernfolgen,
- Periodenlängen,
- Blockgrößen.

Die fundamentale Struktur liegt somit nicht in der Darstellung, sondern in der zugrunde liegenden Gruppenaktion.

14. Ordnung als skalenabhängige Größe

Die Ordnung eines Elements in $\mathbb{Z}_p^*$ ist eine algebraische Größe. Die beobachtete Periodenlänge ist jedoch deren Projektion auf eine gewählte Skala.

Damit wird Ordnung zu einem skalenabhängigen Phänomen:

- Feinere Skalen erzeugen längere Orbits.
- Grobere Skalen erzeugen kürzere Orbits.

Ordnung ist somit relativ zur Beobachtungsauflösung, nicht absolut.

15. Darstellungen als Trajektorien

Eine rationale Zahl wird in dieser Sichtweise nicht durch eine einzelne Darstellung beschrieben, sondern durch eine Trajektorie:

$$\left(\frac{a}{p}\right) \rightarrow \{(b, m, L_{b,m}(p))\}$$

Diese Trajektorie beschreibt, wie sich dieselbe Zahl unter Variation der Basis und Blockgröße darstellt. Die klassische Darstellung ist lediglich ein Punkt auf dieser Trajektorie.

16. Konsequenzen für den Begriff der Eindeutigkeit

Die Eindeutigkeit der Darstellung gilt nur unter der stillschweigenden Annahme einer festen Basis und Blockgröße.

Wird diese Annahme aufgegeben, so ist Eindeutigkeit durch **Äquivalenzklassen von Darstellungen** zu ersetzen. Zwei Darstellungen sind äquivalent, wenn sie durch einen Basis- oder Blockwechsel ineinander überführbar sind.

17. Übergang zur strukturellen Sicht

Die bisherigen Resultate zeigen, dass periodische Darstellungen nicht als primäre Objekte behandelt werden sollten. Stattdessen sind sie sekundäre Projektionen einer invarianten Struktur.

Diese Einsicht bildet die Grundlage für eine strukturelle Neuinterpretation periodischer Darstellungen, in der Komplexität, Ordnung und Wiederholung als skalenabhängige Größen erscheinen.

18. Notwendigkeit einer Neudefinition der Periode

Die klassische Definition der Periode identifiziert sie mit der minimalen Wiederholungslänge einer Ziffernfolge in einer festen Basis. Diese Definition ist formal korrekt, aber konzeptionell unzureichend, da sie Basis und Auflösung implizit fixiert.

Aus den vorangegangenen Abschnitten folgt, dass es keine ausgezeichnete, kanonische Periodenlänge gibt. Stattdessen existiert eine Familie von Periodenlängen, parametrisiert durch Basis und Blockgröße.

Daraus ergibt sich die Notwendigkeit, den Begriff der Periode neu zu formulieren.

19. Strukturperiode statt Ziffernperiode

Es wird vorgeschlagen, zwischen zwei Ebenen zu unterscheiden:

1. **Strukturperiode**
Die Strukturperiode ist die Ordnung eines Elements in der zugrunde liegenden algebraischen Struktur, etwa die Ordnung eines Generators in $\mathbb{Z}_p^*$.
2. **Darstellungsperiode**
Die Darstellungsperiode ist die beobachtete Wiederholungslänge einer Ziffern- oder Blockfolge in einer gewählten Basis und Blockgröße.

Die Strukturperiode ist invariant, die Darstellungsperiode ist skalenabhängig.

20. Blockperioden als Quotienten der Strukturperiode

Für eine gegebene Strukturperiode L ergeben sich alle möglichen Darstellungsperioden als Teiler von L , induziert durch geeignete Wahl von Blockgröße und Basis.

Die klassische Periodenlänge ist somit der maximale Vertreter dieser Familie. Kürzere Perioden sind keine Degeneration, sondern legitime Projektionen derselben Struktur.

21. Revision klassischer Klassifikationen

Klassische Begriffe wie:

- full reptend prime,
- cyclic number,
- primitive period,

beruhen auf der Wahl einer festen Basis (meist Basis 10).

In der dynamischen Basissicht sind diese Begriffe nicht fundamental, sondern basisabhängige Auszeichnungen. Ein Prime kann in einer Basis maximale Periodenlänge besitzen und in einer anderen Basis eine minimale Blockperiode aufweisen.

Damit verlieren diese Klassifikationen ihren absoluten Charakter und werden zu relativen Aussagen über eine konkrete Koordinatisierung.

22. Familien, Versatz und Coset-Struktur

Die Zerlegung periodischer Darstellungen in Familien und Versatzpositionen entspricht der Coset-Struktur der zugrunde liegenden Gruppe.

Jede Familie repräsentiert eine Nebenklasse einer zyklischen Untergruppe, der Versatz entspricht der Position innerhalb des Orbits.

Diese Struktur ist unabhängig von der gewählten Basis, wird jedoch durch Basis- und Blockwahl unterschiedlich sichtbar gemacht.

23. Ordnung als mehrskaliges Phänomen

Ordnung erscheint nicht als singuläre Größe, sondern als mehrskaliges Phänomen:

- Auf feiner Skala manifestiert sie sich als lange Perioden.
- Auf grober Skala kollabiert sie zu kurzen oder einblockigen Perioden.

Diese Skalenabhängigkeit erklärt, warum scheinbar chaotische Ziffernfolgen bei geeigneter Basiswahl hochgradig geordnet erscheinen.

24. Darstellungskomplexität und Informationsgehalt

Die Länge einer periodischen Darstellung ist kein Maß für ihren Informationsgehalt. Vielmehr ist sie ein Maß für die Redundanz der Darstellung relativ zur gewählten Skala.

Kompression durch Basis- oder Blockwechsel entfernt Darstellungsredundanz, nicht strukturelle Information.

Damit ist Kompression nicht nur ein algorithmischer Vorgang, sondern eine strukturelle Vereinfachung.

25. Periodische Darstellung als Messprozess

In der dynamischen Basissicht ist eine periodische Darstellung das Ergebnis eines Messprozesses:

- Die Zahl ist das Objekt.
- Die Basis ist das Messinstrument.
- Die Ziffernfolge ist das Messergebnis.

Unterschiedliche Basen messen unterschiedliche Aspekte derselben Struktur. Keine einzelne Darstellung ist ausgezeichnet.

26. Übergang von Objekten zu Äquivalenzklassen

Statt einzelne Darstellungen zu vergleichen, ist es sinnvoller, Äquivalenzklassen von Darstellungen zu betrachten, die durch Basis- und Blockwechsel ineinander überführbar sind.

Diese Äquivalenzklassen repräsentieren die eigentliche mathematische Struktur, während einzelne Darstellungen lediglich Repräsentanten sind.

27. Konsequenzen für mathematische Ordnung

Die Analyse legt nahe, dass Ordnung in der Mathematik häufig nicht fehlt, sondern durch ungeeignete Koordinatisierungen verdeckt wird.

Lange Perioden, scheinbare Zufälligkeit und hohe Komplexität sind oft Artefakte einer zu feinen oder schlecht angepassten Skala.

28. Zusammenfassung der strukturellen Verschiebung

Die wesentliche Verschiebung besteht darin, periodische Darstellungen nicht mehr als primitive Objekte zu behandeln, sondern als skalierte Projektionen einer invarianten Struktur.

Diese Verschiebung erfordert keine neue Mathematik, sondern eine präzisere Interpretation bekannter algebraischer Konzepte.

29. Ordnung als relationale Größe

Die bisherigen Resultate zeigen, dass Ordnung nicht als absolute Eigenschaft eines mathematischen Objekts verstanden werden kann. Ordnung manifestiert sich stets relativ zu einer gewählten Aktion, Skala oder Koordinatisierung.

Im Kontext periodischer Darstellungen rationaler Zahlen bedeutet dies:

- Die zugrunde liegende algebraische Struktur besitzt Ordnung.
- Die beobachtete Ordnung ist eine Projektion dieser Struktur.
- Die Projektion hängt von der Basis und der Blockgröße ab.

Ordnung ist damit keine Eigenschaft eines isolierten Objekts, sondern eine relationale Größe zwischen Objekt und Darstellungsmechanismus.

30. Trennung von Struktur und Erscheinung

Die dynamische Basissicht erzwingt eine strikte Trennung zwischen:

- **Struktur:** invariant unter Basis- und Blockwechsel
- **Erscheinung:** abhängig von der gewählten Darstellung

Die klassische Dezimalperiode gehört vollständig zur Ebene der Erscheinung. Die zyklische Gruppenstruktur gehört zur Ebene der Struktur.

Diese Trennung ist konzeptionell vergleichbar mit bekannten Unterscheidungen in anderen Bereichen der Mathematik, etwa zwischen Koordinaten und geometrischen Objekten.

31. Darstellungsabhängigkeit mathematischer Komplexität

Komplexität wird häufig anhand der Länge oder Unregelmäßigkeit einer Darstellung beurteilt. Die vorliegende Analyse zeigt, dass diese Einschätzung nicht invariant ist.

Eine lange periodische Darstellung kann durch geeignete Basiswahl zu einer kurzen Blockperiode oder sogar zu einer einblockigen Darstellung komprimiert werden, ohne dass strukturelle Information verloren geht.

Damit ist Darstellungskomplexität kein intrinsisches Maß, sondern abhängig von der gewählten Skala.

32. Revision des Begriffs „Zufälligkeit“ in Ziffernfolgen

Periodische Ziffernfolgen rationaler Zahlen werden oft als pseudozufällig beschrieben, insbesondere bei maximaler Periodenlänge in Basis 10.

In der dynamischen Basissicht ist diese Wahrnehmung ein Artefakt:

- Dieselbe Struktur kann in einer anderen Basis hochgradig regulär erscheinen.
- Zufälligkeit entsteht durch ungeeignete Koordinatisierung, nicht durch fehlende Ordnung.

Zufälligkeit ist damit nicht primär eine Eigenschaft der Zahl, sondern eine Eigenschaft der Beobachtungsskala.

33. Dynamische Basen als Erkenntnisinstrument

Die Wahl einer Basis fungiert als Erkenntnisinstrument. Unterschiedliche Basen machen unterschiedliche Aspekte derselben Struktur sichtbar.

Eine dynamische Basis erlaubt es, diese Aspekte systematisch freizulegen, indem die Skala der Darstellung kontrolliert variiert wird.

Darstellungen werden dadurch nicht ersetzt, sondern in einen Zusammenhang gestellt.

34. Darstellung als Pfad im Koordinatenraum

Wird die Basis als dynamischer Parameter betrachtet, so ist eine Darstellung nicht mehr ein einzelnes Objekt, sondern ein Pfad im Raum möglicher Koordinaten.

Dieser Pfad beschreibt, wie sich dieselbe Zahl unter veränderter Auflösung manifestiert. Die klassische Darstellung ist lediglich ein Punkt auf diesem Pfad.

Diese Sichtweise verlagert den Fokus von einzelnen Darstellungen auf Übergänge zwischen Darstellungen.

35. Konsequenzen für den Begriff der Eindeutigkeit

Eindeutigkeit gilt nur innerhalb einer festgelegten Koordinatisierung. Wird die Koordinatisierung selbst variabel, so ist Eindeutigkeit durch Invarianz zu ersetzen.

Zwei Darstellungen sind nicht dann gleich, wenn sie identische Ziffernfolgen besitzen, sondern wenn sie dieselbe strukturelle Information tragen und durch zulässige Transformationen ineinander überführbar sind.

36. Allgemeinerer Geltungsbereich

Obwohl die Analyse am Beispiel rationaler Zahlen durchgeführt wurde, ist der zugrunde liegende Gedanke allgemeiner Natur.

Überall dort, wo mathematische Objekte über Darstellungen erschlossen werden, stellt sich die Frage, welche Eigenschaften invariant sind und welche lediglich Artefakte der Darstellung.

Die dynamische Basissicht ist daher nicht auf Zahlendarstellungen beschränkt, sondern ein spezieller Fall eines allgemeinen Prinzips.

37. Ordnung als emergente Eigenschaft

Ordnung erscheint in dieser Perspektive nicht als statische Eigenschaft, sondern als emergentes Phänomen, das sich erst im Zusammenspiel von Struktur und Darstellung zeigt.

Je nach Skala kann dieselbe Struktur geordnet, komplex oder scheinbar chaotisch erscheinen, ohne dass sich die Struktur selbst ändert.

38. Zusammenführung der Ergebnisse

Die Untersuchung zeigt:

- Periodische Darstellungen sind skalenabhängig.
 - Ordnung ist relational, nicht absolut.
 - Kompression ist eine Form der strukturellen Klärung, nicht der Informationsreduktion.
 - Die klassische Dezimaldarstellung ist ein Sonderfall maximaler Auflösung, nicht der kanonische Zustand.
-

39. Übergang zur Neubewertung klassischer Begriffe

Die gewonnenen Einsichten legen nahe, zentrale Begriffe der Zahlentheorie und Darstellungstheorie neu zu bewerten, insbesondere dort, wo sie implizit eine feste Basis voraussetzen.

Dies betrifft sowohl didaktische Darstellungen als auch theoretische Klassifikationen.
